sind. Dann stellt sich die Frage, ob eine reguläre Parametrisierung zumindest lokal möglich ist. Allgemein führt dies auf den Begriff der

1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$

als natürliche Verallgemeinerung parametrisierter Kurven. Darauf wollen wir nicht eingehen, stattdessen betrachten wir Beispiele:

① <u>Implizite Kurven</u> (ebener Fall)

a) Die Gleichung $ax + by + c = 0$, $(a,b) \neq (0,0)$, beschreibt die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\} =: M$ in der Ebene. Ist $b \neq 0$, so ist M Graph von $x \mapsto -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, m.a.W.: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) := \left(t, -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b}\right)$, ist eine reguläre Parametrisierung von M. Für $a \neq 0$ gilt entsprechend $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$, und eine

reguläre Parametrisierung wird geleistet von $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,
$\beta(t) := \left(-\frac{b}{a}t - \frac{c}{a}, t\right)$.

b) Sei allgemeiner $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$. Ist $(x_0, y_0) \in M$ und gilt $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, so findet man ein Intervall I um x_0 und eine Funktion $\omega : I \to \mathbb{R}$ mit

$$M \cap \text{Umgebung von } (x_0, y_0) \text{ in } \mathbb{R}^2 = \{(t, \omega(t)) : t \in I\},$$

d.h. M ist lokal bei (x_0, y_0) durch

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (t, \omega(t))$$

regulär parametrisiert. (Es gilt $\alpha'(t) = (1, \omega'(t)) \neq (0,0)$.)

Entsprechend kann man im Fall $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ die Menge M lokal bei (x_0, y_0) in der Form $(\tilde{\omega}(t), t)$,

$t \in$ Intervall um y_0, parametrisieren.

Beweis: Satz über implizite Funktionen.

c) Im konkreten Fall gibt die Theorie oft nur unbefriedigende Antworten, was z.B. die Größe des Auflösungsintervalls angeht. Man rechnet besser direkt: Für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $R > 0$, sei

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2\},$$

also die Kreislinie mit Radius R um (x_0, y_0). Eine mögliche (globale!) reguläre Parametrisierung ist natürlich

$$t \mapsto (x_0, y_0) + R e^{it} =$$

$$(x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\sin t)\ ,\ 0 \le t \le 2\pi,$$

alternativ kann man M als Vereinigung der beiden Graphen von

$$x \mapsto y_0 + \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}\ ,\quad |x-x_0| \le R,$$

$$x \mapsto y_0 - \sqrt{R^2 - (x-x_0)^2}\ ,\quad |x-x_0| \le R$$

(oberer und unterer Halbkreis) darstellen oder

M als Vereinigung "zweier Graphen über der y-Achse"

schreiben (Auflösung nach x).

d) Eine Ellipse mit den Halbachsen $a, b > 0$ wird

gegeben durch die Gleichung

$$\circledast \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

mit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixiert. Sei o.E. $a > b$, $\rho := \sqrt{a^2-b^2}$. Man definiert die Brennpunkte

$$e_{\pm} := (x_0 \pm \rho, y_0)$$

sowie die Abstandssumme

$$d := |(x,y) - e_+| + |(x,y) - e_-|$$

eines Punktes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\circledast$ zu den Brennpunkten.

Ohne Einschränkung sei $(x_0, y_0) = (0,0)$. Dann gilt:

$$d = \sqrt{(x+\rho)^2+y^2} + \sqrt{(x-\rho)^2+y^2} \Longrightarrow$$

$$(x+\rho)^2+y^2 = \left(d - \sqrt{(x-\rho)^2+y^2}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$x^2+2\rho x+\rho^2+y^2 = d^2 - 2d\sqrt{(x-\rho)^2+y^2} + (x-\rho)^2+y^2 \Longrightarrow$$

$$4\rho x = d^2 - 2d\sqrt{(x-\rho)^2+y^2} \Longrightarrow$$

$$16\rho^2x^2 + d^4 - 8d^2\rho x = 4d^2\left((x-\rho)^2+y^2\right) \Longrightarrow$$

$$4d^2y^2 + (4d^2-16\rho^2)x^2 = d^4 - 4d^2\rho^2 .$$

Es folgt: $\dfrac{4}{d^2-4\rho^2}y^2 + \dfrac{4}{d^2}x^2 = 1,$

und ⊛ ergibt $d = 2a$. Die Gleichung ⊛ für die Ellipse charakterisiert diese als geschlossene, ebene Kurve, bei der die Abstandssumme zu zwei festen Punkten konstant ist. Ähnlich wie beim Kreis kann man die Ellipse auf verschiedene Arten regulär parametrisieren, eine Möglichkeit ist die Setzung

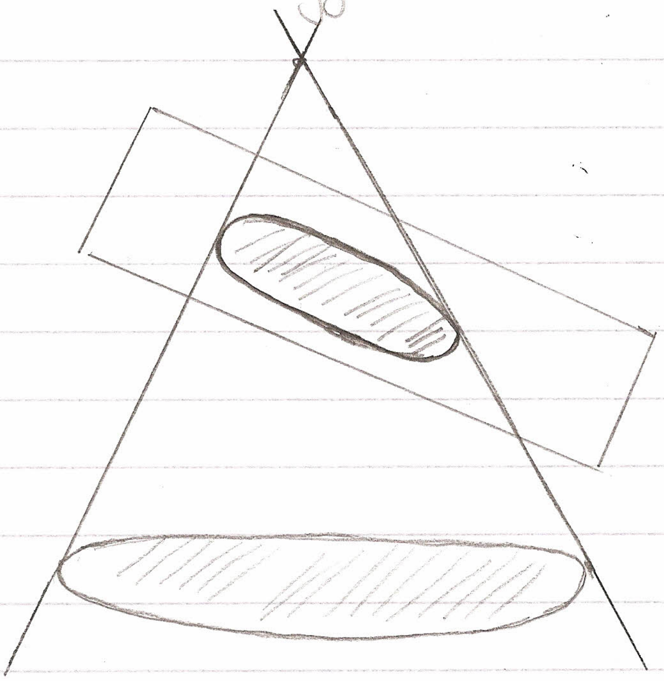
$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (a\cos t, b \sin t),$

denn dann ist mit $\alpha(t) = (x(t), y(t))$

$$\frac{1}{a^2} x(t)^2 + \frac{1}{b^2} y(t)^2 \equiv 1 .$$

(Hier: $x_0 = y_0 = 0$)

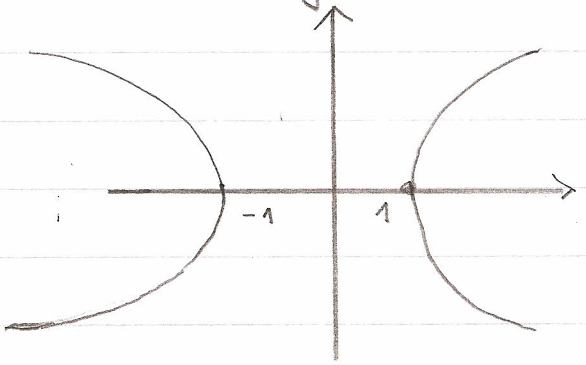
e) Die Ellipse ist ein spezieller Kegelschnitt, also eine durch eine quadratische Gleichung beschriebene ebene Kurve. Wie die Namensgebung sagt, entstehen die Kurven durch Schnitte eines Kreiskegels mit Ebenen, es handelt sich daher strenggenommen um Raumkurven.



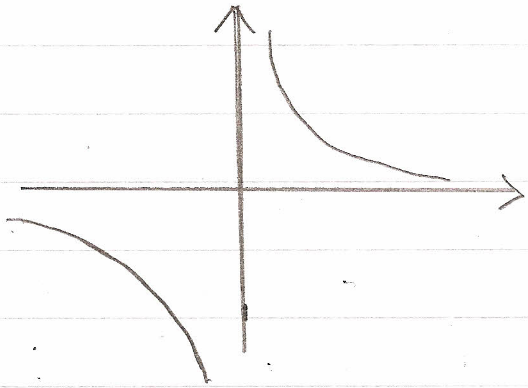
Vereinfacht dargestellt (identifiziere die Ebene mit $\mathbb{R}^2$) ergibt sich:

Hyperbeln:

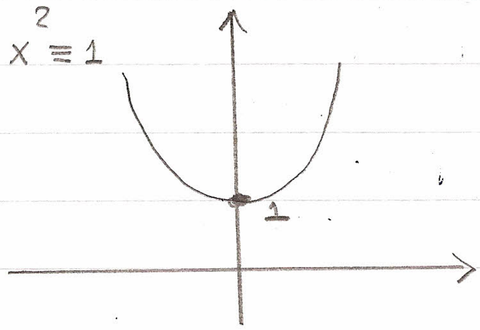
$x^2 - y^2 = 1$



$xy = 1$



Parabeln: $y - x^2 = 1$



sowie Kreis und Ellipse. Als "Grenzlagen" bekommt man Geraden und einpunktige Mengen.

< <u>Übung:</u> etwas über Kegelschnitte, z.B.: schreibe den Kegel(-mantel) als Nullstellenmenge $f(x,y,z) = 0$, wenn die Spitze in $(0,0,0)$ liegt, und der Öffnungswinkel vorgegeben ist; berechne den Schnitt mit einer Ebene $g(x,y,z) = 0$, g affin linear >

② Implizit definierte Raumkurven :

Darunter fallen bereits die Kegelschnitte, allerdings kann man hier den Standpunkt einnehmen, dass es sich nach entsprechender Transformation der Schnittebene um Kurven in $\mathbb{R}^2$ handelt.

a) Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so beschreibt

$$N_f := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0 \}$$

unter geeigneten Voraussetzung an f eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, z. B. erhält man mit $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ die 1-Sphäre S^2 mit Mittelpunkt $(0,0,0)$. Nimmt man noch eine weitere Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hinzu, so wird durch $N_f \cap N_g$ im günstigen Fall ein 1-dimensionales Objekt erzeugt, das unserer Vorstellung von einer Raumkurve entspricht. Allerdings wird keine globale

Parametrisierung mitgeliefert. Die Theorie (Satz über implizite Funktionen) liefert folgende Aussage:

Sei $F := (f,g) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit $F(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Die Jacobi-Matrix $DF(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0,y_0,z_0) \\ \nabla g(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$ habe maximalen Rang, etwa

$$\det \begin{pmatrix} \partial_y f & \partial_z f \\ \partial_y g & \partial_z g \end{pmatrix} (x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Dann gibt es ein Intervall I um x_0 sowie differenzierbare Funktionen $\varphi, \Phi : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$\boxed{N_f \cap N_g \cap \text{Umgebung von } (x_0, y_0, z_0) = \{ (t, \varphi(t), \Phi(t)) : t \in I \}.}$$

Setzt man also $\alpha(t) := (t, \varphi(t), \Phi(t))$, so ist $\alpha'(t) = (1, \varphi'(t), \Phi'(t)) \neq 0$, wir haben also durch

α zumindest lokal eine reguläre Parametrisierung gefunden.

Achtung: Ist z. B.

$$\det \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_z f \\ \partial_x g & \partial_z g \end{pmatrix} (x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

so ist $\alpha(t)$ zu ersetzen durch

$$\tilde{\alpha}(t) = (\tilde{\varphi}(t), t, \tilde{\Phi}(t)).$$

b) Konkret:

i) Sind in $f(x,y,z) := ax + by + cz + d$,

$g(x,y,z) := Ax + By + Cz + D$ die Vektoren

(a,b,c), (A,B,C) <u>linear unabhängig</u>, so ist

$N_f \cap N_g$ eine <u>Gerade in $\mathbb{R}^3$.</u>

ii) Mit $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2$ und

$g(x,y,z) := ax + by + cz + d$ gilt: N_f ist

ein Kegel mit Spitze in $(0,0,0)$, N_g eine Ebene, und durch passende Wahlen von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ bekommt man die Kegelschnitte.

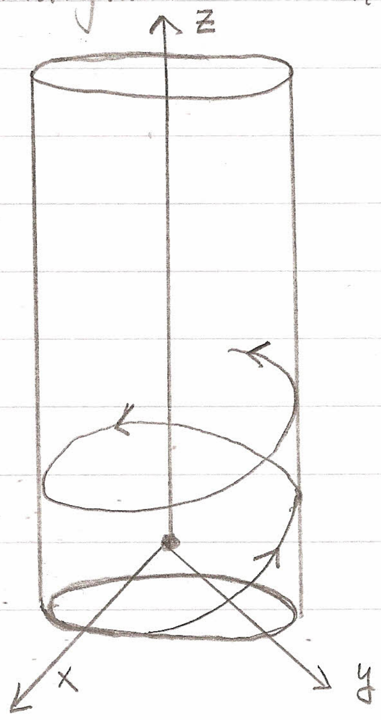
$\square$

Zum Abschluss noch ein Beispiel für parametrisierte Raumkurven, nämlich die

<u>Helix</u> (<u>Schraubenlinie</u>):

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) := (a\cos t, a\sin t, b t)$

mit $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Die Spur dieser Kurve liegt auf dem Zylindermantel $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}$ und "schraubt" sich mit Geschwindigkeit b in Richtung der z-Achse.



Es gilt:

$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\neq 0.$